

Appendice B

CONI IN \mathbb{R}^n

Questa appendice è dedicata alla definizione dei coni in \mathbb{R}^n e alla discussione di alcune loro proprietà, utili nell'analisi dei sistemi lineari positivi.

B.1 Proprietà generali

Definizione B.1.1 [CONO DI \mathbb{R}^n] Un sottoinsieme C di \mathbb{R}^n è un cono se

$$\mathbf{x} \in C \Rightarrow \alpha \mathbf{x} \in C, \forall \alpha \in \mathbb{R}_+.$$

[CONO POSITIVO] Se $C \subseteq \mathbb{R}_+^n$, il cono si dice positivo.

[CONO CONVESSO] Se, per ogni coppia $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ di punti di C tutte le combinazioni convesse $\alpha \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{x}_2$, $0 \leq \alpha \leq 1$ appartengono a C , il cono si dice convesso.

[CONO SOLIDO] Se C contiene qualche sfera di \mathbb{R}^n (o, equivalentemente, qualche aperto di \mathbb{R}^n), il cono si dice solido.

[CONO CON VERTICE¹] Se $\mathbf{x} \in C$ e $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ implicano $-\mathbf{x} \notin C$ (o, equivalentemente, se $C \cap -C = \{\mathbf{0}\}$) il cono ha un vertice.

[CONO CHIUSO] Se C contiene tutti i suoi punti di frontiera, il cono si dice chiuso.

Un cono "proprio" è un cono convesso, solido, chiuso, con vertice.

Esempio B.1.1 Nello spazio \mathbb{R}^3

(i) l'insieme $C_1 = \{(x_1, 0, 0) : x_1 \geq 0\} \cup \{(0, x_2, 0) : x_2 \geq 0\} \cup \{(0, 0, x_3) : x_3 \geq 0\}$ costituito dalla terna di semiassi cartesiani positivi è un cono positivo con vertice;

(ii) l'insieme $C_2 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\} := \mathbb{R}_+^3$ è un cono positivo e proprio, detto l'ortante positivo di \mathbb{R}^3 ;

(iii) l'insieme $C_3 = \{(x_1, x_2, x_3) : (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} \leq x_3\}$ è un cono proprio, detto in gergo "cono gelato"²;

(iv) l'insieme $C_4 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 \geq x_2\}$ è un cono senza vertice (contiene infatti l'asse x_3), convesso, solido e chiuso;

(v) l'insieme $C_5 = \{\mathbf{0}\} \cup \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 > x_2 > x_3 \geq 0\}$ è un cono positivo, convesso, solido, con vertice.

(vi) l'insieme $C_6 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 = 0, x_2 \geq x_1/2, x_2 \leq 2x_1\}$ è un cono positivo, convesso, chiuso, con vertice.

¹nella letteratura inglese "pointed cone".

²in \mathbb{R}^n , $\forall n \geq 3$, il cono $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2)^{\frac{1}{2}} \leq x_n\}$ si dice "cono di Lorentz".

- ESERCIZIO B.1.1 La somma $\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k$ si chiama combinazione convessa dei k vettori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ se i coefficienti λ_i sono non negativi e se $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 1$. Si verifichi che se un cono C è convesso, allora, per ogni $k \geq 2$, esso contiene tutte le combinazioni convesse di k suoi elementi.

‡ *Soluzione:* per definizione, C è convesso se è chiuso rispetto alle combinazioni convesse di due elementi. Induttivamente si assume che sia chiuso rispetto alle combinazioni convesse di al più m elementi e si verifica che lo è rispetto a quelle di $m+1$ elementi. Sia $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i \mathbf{x}_i$, con $\mathbf{x}_i \in C$, $\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i = 1$ e $0 \neq \lambda_i \neq 1$ per $i = 1, \dots, m+1$. Posto $\lambda'_i = \lambda_i / (1 - \lambda_{m+1})$, $i = 1, \dots, m$,

$$\sum_{i=1}^m \lambda'_i = 1, \quad \mathbf{y} = \sum_{i=1}^m \lambda'_i \mathbf{x}_i \in C, \quad \mathbf{x} = (1 - \lambda_{m+1})\mathbf{y} + \lambda_{m+1}\mathbf{x}_{m+1} \in C$$

- ESERCIZIO B.1.2 C è un cono convesso se e solo se $\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y} \in C$, per ogni coppia di vettori \mathbf{x}, \mathbf{y} in C e per ogni $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$.

Due importanti tecniche utilizzate per la presentazione dei coni si basano, rispettivamente, sugli insiemi di *generatori* e sulla intersezione dei *semispazi supporto*. La prima, che introdurremo in questo paragrafo, produce soltanto coni convessi, la seconda, di cui ci occuperemo nei paragrafi successivi, produce soltanto coni chiusi e convessi.

L'insieme $\mathcal{W} = \{\mathbf{w}_i, i \in \mathcal{I}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ è un “insieme di generatori” per il cono C se appartengono al cono tutte e sole le combinazioni lineari finite a coefficienti non negativi di elementi di \mathcal{W}

$$\mathbf{x} \in C \Leftrightarrow \mathbf{x} = \sum_{\substack{i \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{I} \\ \mathcal{F} \text{ finito}}} \lambda_i \mathbf{w}_i, \quad \lambda_i \geq 0.$$

Ogni cono convesso C ammette un insieme di generatori (basta prendere $\mathcal{W} = C$). Di particolare interesse sono i coni che ammettono un insieme di generatori finito (coni “finitamente generati” o anche “coni finiti”).

Se \mathcal{W} è un sottoinsieme di \mathbb{R}^n , denoteremo con $\text{cono}(\mathcal{W})$ il cono convesso che ammette \mathcal{W} come insieme di generatori

$$\text{cono}(\mathcal{W}) := \left\{ \sum_{i \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{I}} \lambda_i \mathbf{w}_i : \mathbf{w}_i \in \mathcal{W}, \lambda_i \geq 0, |\mathcal{F}| < \infty \right\}, \quad (\text{B.1})$$

espressione che, nel caso in cui \mathcal{W} contenga un numero finito k di elementi $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k$, si riduce a

$$\text{cono}(\mathcal{W}) := \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{w}_i, \lambda_i \geq 0 \right\}$$

o anche, introdotta la matrice $W = [\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2 \quad \dots \quad \mathbf{w}_k] \in \mathbb{R}^{n \times k}$ le cui colonne sono i k generatori,

$$\text{cono}(\mathcal{W}) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} = W\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}_+^k \} := \text{cono}(W).$$

- ESERCIZIO B.1.3 (i) In \mathbb{R}^2 ogni cono chiuso e convesso è finitamente generato da 2 generatori.
- (ii) In \mathbb{R}^3 esistono coni chiusi e convessi che non ammettono un numero finito di generatori (p.es. il cono gelato). Per ogni intero positivo n , si fornisca l'esempio di un cono convesso e finitamente generato di \mathbb{R}^3 che ammette un insieme di n generatori, ma nessun insieme di $n-1$ generatori.
- (iii) ogni cono finitamente generato è un insieme chiuso.

Il seguente teorema mostra che ogni vettore \mathbf{x} del cono C generato da un insieme \mathcal{W} può essere espresso come combinazione lineare positiva di un sottoinsieme linearmente indipendente di elementi di \mathcal{W} , quindi come combinazione lineare positiva di al più n elementi di \mathcal{W} . Si noti che gli n elementi di \mathcal{W} dipendono in generale da \mathbf{x} .

Proposizione B.1.2 [TEOREMA DI CARATHÉODORY] *Sia \mathcal{W} un sottoinsieme di \mathbb{R}^n e sia \mathbf{x} un elemento di $\text{cono}(\mathcal{W})$. Esiste allora un sottoinsieme linearmente indipendente $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{W}$ tale che $\mathbf{x} \in \text{cono}(\mathcal{T})$.*

PROVA Per (B.1), ogni elemento \mathbf{x} di $\text{cono}(\mathcal{W})$ è combinazione a coefficienti positivi di qualche sottoinsieme finito \mathcal{F} di elementi di \mathcal{W} . Sia $\mathcal{T} = \{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \dots, \mathbf{t}_k\}$ un sottoinsieme di \mathcal{W} a cardinalità minima tale che

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{t}_1 + \lambda_2 \mathbf{t}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{t}_k, \quad \lambda_i > 0 \quad (\text{B.2})$$

Vogliamo dimostrare che \mathcal{T} è linearmente indipendente. Supponiamo che così non sia. Esistono allora numeri reali $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, non tutti nulli, per cui risulta

$$\mathbf{0} = \alpha_1 \mathbf{t}_1 + \alpha_2 \mathbf{t}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{t}_k \quad (\text{B.3})$$

Se consideriamo, al variare del parametro reale ϕ , i numeri reali $\lambda_i + \phi \alpha_i$, $i = 1, 2, \dots, k$, esistono un valore ϕ_0 e un valore di i , che indicheremo con i_0 , in corrispondenza ai quali si ha

$$\lambda_i + \phi_0 \alpha_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq k, \quad \lambda_{i_0} + \phi_0 \alpha_{i_0} = 0.$$

Se sommiamo membro a membro la (B.3) moltiplicata per ϕ_0 e la (B.2), riusciamo ad esprimere \mathbf{x} come combinazione a coefficienti positivi di un sottoinsieme di \mathcal{T} che esclude \mathbf{t}_{i_0} , ovvero $\mathbf{x} \in \text{cono}(\mathcal{T} \setminus \{\mathbf{t}_{i_0}\})$, contro l'ipotesi che \mathcal{T} abbia cardinalità minima. ■

Proposizione B.1.3 [GENERATORI DEI CONI CON VERTICE] *Sia \mathcal{W} un sottoinsieme di \mathbb{R}^n che non includa il vettore nullo. $C = \text{cono}(\mathcal{W})$ è un cono con vertice se e solo se il vettore $\mathbf{0}$ non è esprimibile come combinazione a coefficienti positivi dei vettori di \mathcal{W}*

PROVA Se C non ha vertice, esiste un vettore $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tale che \mathbf{x} e $-\mathbf{x}$ appartengono entrambi a C . Esistono allora vettori $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_r$ in \mathcal{W} per cui si ha $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^r \xi_i \mathbf{w}_i$, $\xi_i \geq 0 \forall i$, e $-\mathbf{x} = \sum_{i=1}^r \eta_i \mathbf{w}_i$, $\eta_i \geq 0, \forall i$, e in cui, per ogni i , uno almeno dei coefficienti ξ_i e η_i è maggiore di zero. Allora $\mathbf{0} = \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^r (\xi_i + \eta_i) \mathbf{w}_i$ esprime il vettore nullo come combinazione a coefficienti positivi di vettori di \mathcal{W} .

Viceversa, sia $\mathbf{0} = \sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{w}_i$, $r > 1$, $\alpha_i > 0$, $\mathbf{w}_i \neq \mathbf{0}, \forall i$. Consideriamo un vettore non nullo \mathbf{x} espresso da una combinazione a coefficienti non negativi dei vettori $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_r$, ovvero $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^r \xi_i \mathbf{w}_i \neq \mathbf{0}$, $\xi_i \geq 0, \forall i$. Non è restrittivo supporre (riscalando eventualmente le componenti di \mathbf{x}) che sia $\alpha_i \geq \xi_i$, $i = 1, 2, \dots, r$. Allora il vettore $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^r (\alpha_i - \xi_i) \mathbf{w}_i$ appartiene a C e si ha $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{w}_i = \mathbf{0}$. Quindi C , contenendo sia \mathbf{x} che $\mathbf{y} = -\mathbf{x}$, non ha vertice. ■

Proposizione B.1.4 [GENERATORI DEI CONI SOLIDI] *Sia \mathcal{W} un sottoinsieme di \mathbb{R}^n . $C = \text{cono}(\mathcal{W})$ è solido se e solo se $\text{span}(\mathcal{W}) = \mathbb{R}^n$, ossia se l'insieme \mathcal{W} contiene n vettori linearmente indipendenti.*

PROVA Si veda la prova della proposizione 12.4.5. ■

Definizione B.1.5 [CONO SOMMA] *Dati due coni C_1 e C_2 in \mathbb{R}^n , l'insieme*

$$C_1 + C_2 := \{\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \quad \mathbf{x}_1 \in C_1, \quad \mathbf{x}_2 \in C_2\}$$

è detto "cono somma" di C_1 e C_2 .

Anch'esso è un cono, convesso se C_1 e C_2 sono convessi, chiuso se C_1 e C_2 sono chiusi.

Dato un cono $C \subseteq \mathbb{R}^n$, il sottospazio $\langle C \rangle$, generato dalle combinazioni lineari (senza vincoli di segno!) di elementi di C è il più piccolo sottospazio di \mathbb{R}^n che contiene C . La dimensione di $\langle C \rangle$ è il massimo numero di vettori linearmente indipendenti appartenenti a C .

B.2 Punti interni di un cono

Definizione B.2.1 [INTERNO DI UN CONO] *Un punto \mathbf{x} in un cono C si dice “interno a C ” se esiste una sfera $S(\mathbf{x}, \epsilon) \subseteq \mathbb{R}^n$ con raggio positivo tale che appartengano a C tutti i punti dell'intersezione $S(\mathbf{x}, \epsilon) \cap \langle C \rangle$.*

L’“interno relativo di C ” è l'insieme dei punti interni a C e si denota con $\text{ri}(C)$:

$$\text{ri}(C) = \{\mathbf{x} \in C : \exists \epsilon > 0, S(\mathbf{x}, \epsilon) \cap \langle C \rangle \subset C\} \quad (\text{B.4})$$

- ESERCIZIO B.2.1 Con riferimento all'esempio B.1.1, si verifichi che il punto $(1,1,0)$ è interno soltanto al cono C_6 .

Proposizione B.2.2 [CARATTERIZZAZIONE DEI PUNTI INTERNI] *Siano C un cono di \mathbb{R}^n e $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r)$, $r \leq n$, una base per $\langle C \rangle$. Si equivalgono le seguenti proprietà:*

- 1) $\mathbf{x} \in \text{ri}(C)$;
- 2) $\gamma \mathbf{x} \in \text{ri}(C)$ per ogni $\gamma > 0$;
- 3) esiste $\epsilon > 0$ tale per cui $\mathbf{x} + (S(\mathbf{0}, \epsilon) \cap \langle C \rangle) \subset C$;
- 4) esiste $m > 0$ tale per cui $\mathbf{x} + \sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{v}_i \in C$, per ogni scelta di α_i con $|\alpha_i| < m$.

PROVA (1) \Leftrightarrow (3) L'affermazioni di ciascuna riga equivale a quella della riga seguente:

$$\begin{array}{llll} \mathbf{x} \in C & \text{e} & S(\mathbf{x}, \epsilon) \cap \langle C \rangle \subset C & \exists \epsilon > 0, & \text{propriet\`a (1)} \\ \mathbf{x} \in C & \text{e} & (\mathbf{x} + S(\mathbf{0}, \epsilon)) \cap \langle C \rangle \subset C & \exists \epsilon > 0, & \\ & & \mathbf{x} + (S(\mathbf{0}, \epsilon) \cap \langle C \rangle) \subset C & \exists \epsilon > 0. & \text{propriet\`a (3)} \end{array}$$

Per verificare l'equivalenza (3) \Leftrightarrow (4), ricordiamo che la matrice gramiana (cfr. Esempio A.12.6) dei vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ è definita positiva, quindi sono positivi il minimo e il massimo dei suoi autovalori λ_{\min} e λ_{\max} e, tenendo conto di (A.127), per ogni vettore $\mathbf{z} = \sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{v}_i \in \langle C \rangle$ si ha

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 < \frac{\epsilon^2}{\lambda_{\max}} \Rightarrow \mathbf{z} \in S(\mathbf{0}, \epsilon), \quad \mathbf{z} \in S(\mathbf{0}, \epsilon) \Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 < \frac{\epsilon^2}{\lambda_{\min}} \quad (\text{B.5})$$

Supponiamo che valga l'ipotesi (3). Poniamo $m := \epsilon / \sqrt{r \lambda_{\max}}$ e consideriamo un vettore $\mathbf{x} + \sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{v}_i$ con $|\alpha_i| < m$. Allora le componenti di $\mathbf{z} = \sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{v}_i$ soddisfano $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 < \epsilon^2 / \lambda_{\max}$, quindi, per (B.5), \mathbf{z} appartiene a $S(\mathbf{0}, \epsilon) \cap \langle C \rangle$ e, poiché vale la (3), $\mathbf{x} + \mathbf{z}$ appartiene a C .

Supponiamo che valga l'ipotesi (4). Poniamo $\epsilon = m \sqrt{\lambda_{\min}}$ e consideriamo un arbitrario vettore $\mathbf{x} + \mathbf{z}$ con $\mathbf{z} = \sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{v}_i \in \langle C \rangle$ e $\|\mathbf{z}\|_2 < \epsilon$. Da (B.5) si ha $\max_i \alpha_i^2 \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 < \epsilon^2 / \lambda_{\min} = m^2$ e pertanto $|\alpha_i| < m$, $\forall i$. Allora, per (4), $\mathbf{x} + \mathbf{z}$ appartiene a C .

(2) \Leftrightarrow (4) Se γ è un arbitrario numero reale positivo, valgono le equivalenze

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{v}_i \in C, \forall \alpha_i, |\alpha_i| < m & \Leftrightarrow \gamma \mathbf{x} + \sum_{i=1}^r (\gamma \alpha_i) \mathbf{v}_i \in C, \forall \alpha_i, |\alpha_i| < m \\ & \Leftrightarrow \gamma \mathbf{x} + \sum_{i=1}^r \beta_i \mathbf{v}_i \in C, \forall \beta_i, |\beta_i| < m\gamma \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Esempio B.2.1 In \mathbb{R}^3 l'ortante positivo $C = \mathbb{R}_+^3$ è un cono convesso che ha come interno relativo l'insieme dei vettori strettamente positivi di \mathbb{R}^3 , ovvero

$$\text{ri}(C) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0 \right\}.$$

Il cono convesso $K \subset C$, costituito dai vettori di C che hanno nulla la componente x_3 (K è quindi una delle tre “facce” dell'ortante), ha per interno relativo l'insieme

$$\text{ri}(K) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 = 0 \right\}.$$

L'esempio dimostra che $K \subset C$ non implica necessariamente $\text{ri}(K) \subseteq \text{ri}(C)$.

Proposizione B.2.3 Ogni cono convesso $C \not\subseteq \{0\}$ ha un interno relativo non vuoto.

PROVA Supponiamo che $\langle C \rangle$ abbia dimensione $r > 0$. Scelti in C r vettori linearmente indipendenti $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$, anche la loro combinazione convessa $\bar{\mathbf{x}} = (1/r) \sum_{i=1}^r \mathbf{v}_i$ appartiene a C .

Vogliamo verificare che $\bar{\mathbf{x}}$ è interno a C , ossia (in base al punto (4) della proposizione B.2.2) esiste $m > 0$ tale che $|\alpha_i| < m$, $i = 1, 2, \dots, r$, implica $\bar{\mathbf{x}} + \sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{v}_i \in C$. Se scegliamo $m = 1/r$, ogni vettore

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^r \left(\frac{1}{r} + \alpha_i\right) \mathbf{v}_i, \quad \text{con } |\alpha_i| < \frac{1}{r}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

è combinazione lineare a coefficienti positivi di vettori del cono e quindi appartiene al cono. ■

La seguente proposizione elenca alcune proprietà dell'interno relativo dei coni convessi, che saranno utilizzate nel seguito.

Proposizione B.2.4 [INTERNO DEI CONI CONVESSI] Sia $C \not\subseteq \{0\}$ un cono convesso in \mathbb{R}^n e \bar{C} ne denoti la chiusura.

a) Se $\mathbf{x} \in \text{ri}(C)$, allora per ogni $\bar{\mathbf{y}} \in \bar{C}$ (in particolare, per ogni $\bar{\mathbf{y}} \in C$)

$$\alpha \mathbf{x} + (1 - \alpha) \bar{\mathbf{y}} \in \text{ri}(C), \quad \forall \alpha \in (0, 1] \tag{B.6}$$

b) $\mathbf{x} \in \text{ri}(C)$ se e solo se, per ogni $\mathbf{y} \in C$,

$$\gamma \mathbf{x} + (1 - \gamma) \mathbf{y} \in C, \quad \exists \gamma > 1; \tag{B.7}$$

c) chiusura e interno relativo soddisfano le seguenti identità

$$\begin{aligned} \bar{C} &= \overline{\text{ri}(C)} \\ \text{ri}(C) &= \text{ri}(\bar{C}) \end{aligned} \tag{B.8}$$

Se C_1 e C_2 sono coni convessi di \mathbb{R}^n ,

d) $\text{ri}(C_1 + C_2) = \text{ri}(C_1) + \text{ri}(C_2)$;

e) se $\text{ri}(C_1) \cap \text{ri}(C_2) \neq \emptyset$, allora $\text{ri}(C_1 \cap C_2) = \text{ri}(C_1) \cap \text{ri}(C_2)$;

f) se $\text{ri}(C_1) \cap \text{ri}(C_2) \neq \emptyset$ e se $C_1 \subseteq C_2$, allora $\text{ri}(C_1) \subseteq \text{ri}(C_2)$.

PROVA Sia $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ una base per $\langle C \rangle$ costituita da vettori linearmente indipendenti di C .

(a) Poiché \mathbf{x} appartiene a $\text{ri}(C)$, esiste un numero reale $m > 0$ per cui

$$|\beta_i| < m, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} + \sum_{i=1}^r \beta_i \mathbf{v}_i \in C, \tag{B.9}$$

Fissato un arbitrario $\alpha \in (0, 1]$, vogliamo provare che i punti

$$[\alpha \mathbf{x} + (1 - \alpha) \bar{\mathbf{y}}] + \sum_{i=1}^r \alpha \beta_i \mathbf{v}_i, \quad \forall \beta_i, \quad |\beta_i| < \frac{m}{2}$$

sono tutti contenuti in C e pertanto $\alpha \mathbf{x} + (1 - \alpha) \bar{\mathbf{y}} \in \text{ri}(C)$.

Appartenendo $\bar{\mathbf{y}}$ a \bar{C} , esiste un vettore $\mathbf{y}(\alpha) \in C$ tale per cui

$$\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{y}(\alpha) = \sum_{i=1}^r \rho_i(\alpha) \mathbf{v}_i \quad \text{con } |\rho_i(\alpha)| < \alpha m / 2, \quad i = 1, \dots, r$$

Allora, per ogni scelta dei β_i con $|\beta_i| < m/2$,

$$[\alpha \mathbf{x} + (1 - \alpha) \bar{\mathbf{y}}] + \sum_{i=1}^r \alpha \beta_i \mathbf{v}_i = \alpha \left(\mathbf{x} + \sum_{i=1}^r \beta_i \mathbf{v}_i \right) + (1 - \alpha) \bar{\mathbf{y}}$$

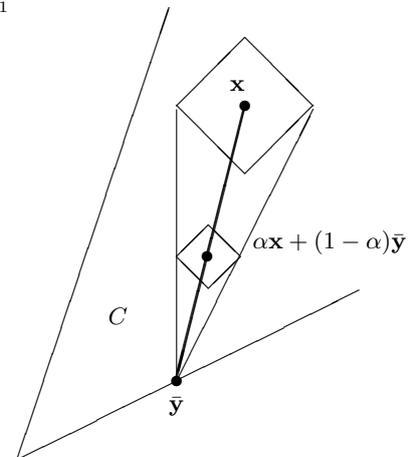


Figura B.2.1

$$\begin{aligned}
&= \alpha \left(\mathbf{x} + \sum_{i=1}^r \beta_i \mathbf{v}_i \right) + (1 - \alpha) \left(\mathbf{y}(\alpha) + \sum_{i=1}^r \rho_i(\alpha) \mathbf{v}_i \right) \\
&= \alpha \left(\mathbf{x} + \sum_{i=1}^r \left[\beta_i + (1 - \alpha) \frac{\rho_i(\alpha)}{\alpha} \right] \mathbf{v}_i \right) + (1 - \alpha) \mathbf{y}(\alpha) \in C.
\end{aligned}$$

Infatti, attesi i confini sui β_i e sui $\rho_i(\alpha)$, risulta $|\beta_i + (1 - \alpha)\rho_i(\alpha)/\alpha| < m$ e ciò implica, per (B.9), l'appartenenza a C del punto $\mathbf{x} + \sum_{i=1}^r [\beta_i + (1 - \alpha)\rho_i(\alpha)/\alpha] \mathbf{v}_i$ e, per la convessità di C , l'appartenenza a C della combinazione convessa del punto stesso e di $\mathbf{y}(\alpha)$.

(b) Se $\mathbf{x} \in \text{ri}(C)$ e $\mathbf{y} \in C$, sia $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^r \xi_i \mathbf{v}_i$ e $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^r \eta_i \mathbf{v}_i$ la loro rappresentazione sulla base di $\langle C \rangle$. Sia inoltre $m > 0$ un numero tale per cui i vettori $\mathbf{x} + \sum_{i=1}^r \beta_i \mathbf{v}_i$ appartengono al cono C quando tutti i coefficienti β_i soddisfano $|\beta_i| < m$. Infine, scegliamo $\epsilon > 0$ in modo da soddisfare simultaneamente le disequaglianze $\epsilon|\xi_i| < m/2$, $i = 1, 2, \dots, r$, $\epsilon|\eta_i| < m/2$, $i = 1, 2, \dots, r$.

Allora, ponendo $\gamma = 1 + \epsilon$ si verifica la (B.7): infatti il vettore $\gamma \mathbf{x} + (1 - \gamma) \mathbf{y} = (1 + \epsilon) \mathbf{x} - \epsilon \mathbf{y} = \mathbf{x} + \sum_{i=1}^r \epsilon(\xi_i - \eta_i) \mathbf{v}_i$ appartiene a C , essendo $|\epsilon\xi_i - \epsilon\eta_i| \leq |\epsilon\xi_i| + |\epsilon\eta_i| < m$ per $i = 1, \dots, r$.

Viceversa, supponiamo che la (B.7) valga per ogni $\mathbf{y} \in C$. Allora essa vale, in particolare, scegliendo \mathbf{y} in $\text{ri}(C)$, che non è vuoto per la proposizione B.2.3 Per tale scelta di \mathbf{y} , esiste $\gamma > 1$ tale da aversi $\mathbf{z} := \gamma \mathbf{x} + (1 - \gamma) \mathbf{y} \in C$ e quindi $\mathbf{x} = \frac{1}{\gamma} \mathbf{z} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \mathbf{y}$, $0 < \frac{1}{\gamma} < 1$.

Allora \mathbf{x} è combinazione convessa, con combinatori diversi da 0 e da 1, di $\mathbf{z} \in C$ e di $\mathbf{y} \in \text{ri}(C)$. Basta applicare il punto (a) per concludere che \mathbf{x} è nell'interno relativo di C .

(c.1) IDENTITÀ $\overline{\text{ri}(C)} = \overline{C}$. Da $\text{ri}(C) \subseteq C$, prendendo le chiusure di entrambi i membri, segue $\overline{\text{ri}(C)} \subseteq \overline{C}$. Per verificare l'inclusione inversa, se $\mathbf{x} \in \overline{C}$ e \mathbf{y} è un arbitrario vettore in $\text{ri}(C)$ (la cui esistenza è garantita dalla convessità di C), allora appartiene a $\text{ri}(C)$ ogni combinazione convessa $\alpha \mathbf{y} + (1 - \alpha) \mathbf{x}$ con $\alpha \in (0, 1]$, quindi \mathbf{x} è punto di accumulazione per l'insieme $\text{ri}(C)$ e appartiene a $\overline{\text{ri}(C)}$.

(c.2) IDENTITÀ $\text{ri}(C) = \text{ri}(\overline{C})$. Poichè $\langle C \rangle$ è chiuso, in quanto sottospazio di \mathbb{R}^n , si ha $C \subseteq \overline{C} \subseteq \langle C \rangle$. Se $\mathbf{x} \in \text{ri}(C)$, allora esiste $m > 0$ per cui $\mathbf{x} + \sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{v}_i \in C \subseteq \overline{C}$ per ogni scelta di α_i con $|\alpha_i| < m$, e ciò implica $\mathbf{x} \in \text{ri}(\overline{C})$.

Viceversa, assumiamo $\mathbf{x} \in \text{ri}(\overline{C})$ e sia \mathbf{y} un punto di $\text{ri}(C)$. Se \mathbf{y} è distinto da \mathbf{x} (altrimenti avremmo già $\mathbf{x} \in \text{ri}(C)$), consideriamo in $\langle C \rangle$ la combinazione lineare

$$\mathbf{z} = (1 - \gamma) \mathbf{y} + \gamma \mathbf{x} = \mathbf{x} - (\gamma - 1)(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \quad (\text{B.10})$$

per valori $\gamma > 1$. Se $\gamma - 1$ è positivo e abbastanza piccolo, il punto \mathbf{z} , al pari di \mathbf{x} , appartiene a $\text{ri}(\overline{C})$ e quindi a \overline{C} . Ma da (B.10) si ricava $\mathbf{x} = \frac{1}{\gamma} \mathbf{z} + (1 - \frac{1}{\gamma}) \mathbf{y}$, $0 < \frac{1}{\gamma} < 1$ e $\mathbf{x} \in \text{ri}(C)$ per il punto (a).

Per dimostrare (d) e (e), consideriamo una base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ per $\langle C_1 \rangle \cap \langle C_2 \rangle$, scegliendone i primi vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{r'}$, $0 \leq r' \leq r$, in modo che generino $\langle C_1 \cap C_2 \rangle$, e la completiamo con i vettori $\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_s$ ad una base per $\langle C_1 \rangle$ e con i vettori $\mathbf{v}_{s+1}, \dots, \mathbf{v}_t$ ad una base per $\langle C_2 \rangle$, ottenendo complessivamente una base per $\langle C_1 + C_2 \rangle$.

$$\begin{array}{c}
\text{base per } \langle C_1 \rangle \\
\overbrace{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{r'} \dots \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_s} \\
\text{base per } \langle C_1 \rangle \cap \langle C_2 \rangle \qquad \underbrace{\mathbf{v}_{s+1}, \dots, \mathbf{v}_t}_{\text{base per } \langle C_2 \rangle} \\
\swarrow \qquad \searrow \\
\text{base per } \langle C_2 \rangle
\end{array}$$

(d) Supponiamo $\bar{\mathbf{x}} \in \text{ri}(C_1) + \text{ri}(C_2)$, ovvero $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}_1 + \bar{\mathbf{x}}_2$, con $\bar{\mathbf{x}}_1 \in \text{ri}(C_1)$ e $\bar{\mathbf{x}}_2 \in \text{ri}(C_2)$. Esiste allora $m > 0$ per cui valgono simultaneamente $\bar{\mathbf{x}}_1 + \sum_{i=1}^s \alpha_i \mathbf{v}_i \in C_1$ e $\bar{\mathbf{x}}_2 + \sum_{i=1}^r \beta_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=s+1}^t \beta_i \mathbf{v}_i \in C_2$, se i moduli dei coefficienti, $|\alpha_i|$ e $|\beta_i|$, sono tutti simultaneamente minori di m . Allora, per ogni scelta dei coefficienti γ_i soddisfacente $|\gamma_i| < m$, $i = 1, 2, \dots, t$, si ha

$$\bar{\mathbf{x}} + \sum_{i=1}^t \gamma_i \mathbf{v}_i = \left(\bar{\mathbf{x}}_1 + \sum_{i=1}^s \gamma_i \mathbf{v}_i \right) + \left(\bar{\mathbf{x}}_2 + \sum_{i=s+1}^t \gamma_i \mathbf{v}_i \right) \in C_1 + C_2,$$

e ciò dimostra l'appartenenza di $\bar{\mathbf{x}}$ a $\text{ri}(C_1 + C_2)$.

Supponiamo, viceversa, $\bar{\mathbf{x}} \in \text{ri}(C_1 + C_2)$. Allora esiste $m > 0$ tale per cui i vettori $\bar{\mathbf{x}} + \sum_{i=1}^t \alpha_i \mathbf{v}_i$ appartengono a $C_1 + C_2$ non appena tutti i coefficienti α_i soddisfano le condizioni $|\alpha_i| < 3m$. Per ogni t -upla $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_t)$, con $\sigma_i \in \{1, -1\}$, consideriamo il punto $\mathbf{x}(\boldsymbol{\sigma}) := \bar{\mathbf{x}} + \sum_{i=1}^t \sigma_i 2m \mathbf{v}_i$ in $C_1 + C_2$ e due ulteriori punti, $\mathbf{x}_1(\boldsymbol{\sigma})$ in C_1 e $\mathbf{x}_2(\boldsymbol{\sigma})$ in C_2 , che soddisfano la condizione $\mathbf{x}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{x}_1(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{x}_2(\boldsymbol{\sigma})$. Introduciamo l'involuppo convesso³ \mathcal{L}_1 dei punti $\mathbf{x}_1(\boldsymbol{\sigma})$ e l'involuppo convesso \mathcal{L}_2 dei punti $\mathbf{x}_2(\boldsymbol{\sigma})$. Poiché C_1 e C_2 sono convessi, abbiamo

$$\mathcal{L}_\nu = \left\{ \sum_{\sigma_i \in \{1, -1\}} \gamma_\sigma \mathbf{x}_\nu(\boldsymbol{\sigma}), 0 \leq \gamma_\sigma \leq 1, \sum_{\sigma_i \in \{1, -1\}} \gamma_\sigma = 1 \right\} \subset C_\nu, \quad \nu = 1, 2$$

Allora l'involuppo convesso $\mathcal{S}^{(2m)}$ dei punti $\mathbf{x}(\boldsymbol{\sigma})$ coincide con $\{\bar{\mathbf{x}} + \sum_{i=1}^t \alpha_i \mathbf{v}_i, |\alpha_i| \leq 2m\} \subset C_1 + C_2$ e verifica l'inclusione

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{(2m)} &= \left\{ \sum_{\sigma_i \in \{1, -1\}} \gamma_\sigma \mathbf{x}(\boldsymbol{\sigma}), 0 \leq \gamma_\sigma \leq 1, \sum_{\sigma_i \in \{1, -1\}} \gamma_\sigma = 1 \right\} \\ &= \left\{ \sum_{\sigma_i \in \{1, -1\}} \gamma_\sigma (\mathbf{x}_1(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{x}_2(\boldsymbol{\sigma})), 0 \leq \gamma_\sigma \leq 1, \sum_{\sigma_i \in \{1, -1\}} \gamma_\sigma = 1 \right\} \\ &\subseteq \left\{ \sum_{\sigma_i \in \{1, -1\}} \gamma_\sigma \mathbf{x}_1(\boldsymbol{\sigma}), 0 \leq \gamma_\sigma \leq 1, \sum_{\sigma_i \in \{1, -1\}} \gamma_\sigma = 1 \right\} + \left\{ \sum_{\sigma_i \in \{1, -1\}} \gamma_\sigma \mathbf{x}_2(\boldsymbol{\sigma}), 0 \leq \gamma_\sigma \leq 1, \sum_{\sigma_i \in \{1, -1\}} \gamma_\sigma = 1 \right\} \\ &= \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 \end{aligned} \tag{B.11}$$

Infine, se $\mathbf{p}_1 \in \text{ri}(C_1)$ e $\mathbf{p}_2 \in \text{ri}(C_2)$, dal punto (2) della proposizione B.2.2 e dal punto (a) che abbiamo provato segue che per ogni $\epsilon > 0$ valgono le inclusioni $\mathcal{L}_{1\epsilon} := \epsilon \mathbf{p}_1 + \mathcal{L}_1 \subset \text{ri}(C_1)$ e $\mathcal{L}_{2\epsilon} := \epsilon \mathbf{p}_2 + \mathcal{L}_2 \subset \text{ri}(C_2)$, mentre per ϵ abbastanza piccolo si ha $\mathcal{L}_{1\epsilon} + \mathcal{L}_{2\epsilon} = \epsilon(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) + (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) \supset \mathcal{S}^{(m)} = \{\bar{\mathbf{x}} + \sum_{i=1}^t \alpha_i \mathbf{v}_i, |\alpha_i| \leq m\}$. Ciò dimostra che $\bar{\mathbf{x}} \in \text{ri}(C_1) + \text{ri}(C_2)$.

(e) Se $\bar{\mathbf{x}} \in \text{ri}(C_1) \cap \text{ri}(C_2)$, allora $\bar{\mathbf{x}} \in C_1 \cap C_2$ ed esiste $m > 0$ per cui $\bar{\mathbf{x}} + \sum_{i=1}^s \alpha_i \mathbf{v}_i \in C_1$ e $\bar{\mathbf{x}} + \sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=s+1}^t \alpha_i \mathbf{v}_i \in C_2$, per ogni scelta dei coefficienti α_i che soddisfino la condizione $|\alpha_i| < m$. Da $\bar{\mathbf{x}} + \sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{v}_i \in C_1 \cap C_2, \forall \alpha_i, |\alpha_i| < m$ segue $\bar{\mathbf{x}} \in \text{ri}(C_1 \cap C_2)$.

Viceversa, sia $\bar{\mathbf{x}} \in \text{ri}(C_1 \cap C_2)$. Esiste allora $m > 0$ per cui $\mathcal{S} = \{\bar{\mathbf{x}} + \sum_{i=1}^{r'} \alpha_i \mathbf{v}_i, |\alpha_i| < m\} \subset C_1 \cap C_2$. Poiché $\text{ri}(C_1) \cap \text{ri}(C_2)$ si è ipotizzato non vuoto, esiste anche $\mathbf{p} \in \text{ri}(C_1) \cap \text{ri}(C_2) \subseteq C_1 \cap C_2$, esprimibile nella forma $\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{r'} \beta_i \mathbf{v}_i$.

Per ogni $\epsilon > 0$ e se $|\alpha_i| < m, \forall i$, dal punto (a) e dal punto (2) della proposizione B.2.2 si deduce che $\epsilon \mathbf{p} + \bar{\mathbf{x}} + \sum_{i=1}^{r'} \alpha_i \mathbf{v}_i \in \text{ri}(C_1) \cap \text{ri}(C_2)$. Infine, se ϵ è sufficientemente piccolo, tutte le componenti $\epsilon \beta_i$ di $\epsilon \mathbf{p}$ hanno modulo minore a m e quindi $\epsilon \mathbf{p} + \bar{\mathbf{x}} - \sum_{i=1}^{r'} \epsilon \beta_i \mathbf{v}_i = \bar{\mathbf{x}} \in \text{ri}(C_1) \cap \text{ri}(C_2)$.

(f) Sia $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s$ è una base per $\langle C_1 \rangle$, che completiamo ad una base per $\langle C_2 \rangle$ aggiungendo (eventuali) vettori $\mathbf{v}_{s+1}, \dots, \mathbf{v}_t$.

Se $\bar{\mathbf{x}} \in \text{ri}(C_1)$, esiste $m > 0$ per cui $\bar{\mathbf{x}} + \sum_{i=1}^s \alpha_i \mathbf{v}_i \in C_1, |\alpha_i| < m$.

Per ipotesi, esiste un vettore $\mathbf{p} \in \text{ri}(C_1) \cap \text{ri}(C_2) \subset \langle C_1 \rangle$, esprimibile quindi nella forma $\mathbf{p} = \sum_{i=1}^s \beta_i \mathbf{v}_i$. Allora, per ogni $\epsilon > 0$ e per ogni scelta di $\alpha_i, i = 1, \dots, s$ con $|\alpha_i| < m$, il vettore $\epsilon \mathbf{p} + \bar{\mathbf{x}} + \sum_{i=1}^s \alpha_i \mathbf{v}_i$ appartiene a $\text{ri}(C_2)$, dal momento che $\mathbf{p} \in \text{ri}(C_1)$ e $\bar{\mathbf{x}} + \sum_{i=1}^s \alpha_i \mathbf{v}_i$ appartiene a C_2 .

D'altra parte, se ϵ è abbastanza piccolo, si ha $\epsilon |\beta_i| < m, \forall i$, e quindi $\bar{\mathbf{x}} = \epsilon \mathbf{p} + \bar{\mathbf{x}} - \sum_{i=1}^s \epsilon \beta_i \mathbf{v}_i \in \text{ri}(C_2)$. ■

- ESERCIZIO B.2.2 Il punto (a) della proposizione B.2.4 è equivalente al seguente

(a') Sia $C \not\subseteq \mathbf{0}$ un cono convesso. Se $\mathbf{x} \in \text{ri}(C)$, e $\bar{\mathbf{y}} \in \bar{C}$, allora $\beta \mathbf{x} + \bar{\mathbf{y}} \in \text{ri}(C), \forall \beta > 0$.

‡ Suggestione: dal punto (a) $\alpha \mathbf{x} + (1 - \alpha) \bar{\mathbf{y}} \in \text{ri}(C), \forall \alpha \in (0, 1)$, quindi $\alpha / (1 - \alpha) \mathbf{x} + \bar{\mathbf{y}} \in \text{ri}(C)$ per il punto (2) della proposizione B.2.2. Se α varia in $(0, 1)$, $\beta = \alpha / (1 - \alpha)$ descrive i reali positivi. Viceversa, da (a'), ponendo $\alpha = \beta / (1 + \beta)$ si ricava (a) con $\alpha \in (0, 1)$ e quindi anche in $(0, 1]$.

- ESERCIZIO B.2.3 Se al punto (f) della proposizione B.2.4 si elimina l'ipotesi $\text{ri}(C_1) \cap \text{ri}(C_2) \neq \emptyset$, la conclusione $\text{ri}(C_1) \subseteq \text{ri}(C_2)$ in generale non è vera.

³ cioè l'insieme delle combinazioni convesse

B.3 Teorema di separazione e coni duali

Un *iperpiano* di \mathbb{R}^n è un sottospazio di dimensione $n - 1$. Ogni iperpiano può essere specificato, tramite l'assegnazione di un vettore non nullo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, come la totalità dei vettori ortogonali a \mathbf{v}

$$\mathcal{H}_{\mathbf{v}} = (\text{span } \mathbf{v})^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{v}^T \mathbf{x} = 0\} \quad (\text{B.12})$$

o, equivalentemente, come il nucleo del funzionale lineare $\psi_{\mathbf{v}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto \psi_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}^T \mathbf{x}$. L'iperpiano $\mathcal{H}_{\mathbf{v}}$ divide lo spazio in due *semispazi* chiusi, aventi l'iperpiano stesso come frontiera comune,

$$\mathcal{S}_{\mathbf{v}}^+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{v}^T \mathbf{x} \geq 0\}, \quad \mathcal{S}_{\mathbf{v}}^- = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{v}^T \mathbf{x} \leq 0\}$$

e al primo dei quali appartiene il vettore \mathbf{v} . Diremo che il semispazio $\mathcal{S}_{\mathbf{v}}^+$ è un *supporto* per il cono C se $C \subseteq \mathcal{S}_{\mathbf{v}}^+$.

Lemma B.3.1 [Distanza minima di un punto da un chiuso] *Siano C un sottoinsieme chiuso e non vuoto di \mathbb{R}^n e $\bar{\mathbf{y}}$ un vettore non appartenente a C . Allora*

i) *esiste un vettore $\bar{\mathbf{x}} \in C$ tale che*

$$\|\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}\| = \inf_{\mathbf{x} \in C} \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{y}}\| := d(\bar{\mathbf{y}}, C); \quad (\text{B.13})$$

ii) *se C è convesso, il vettore $\bar{\mathbf{x}} \in C$ che soddisfa la (B.13) è unico, e vale la disuguaglianza*

$$(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}})^T (\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) \leq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in C \quad (\text{B.14})$$

PROVA (i) Per la definizione di estremo inferiore, esiste in C una successione di vettori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$ che soddisfa la condizione

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{y}}\| = d(\bar{\mathbf{y}}, C). \quad (\text{B.15})$$

Poiché ogni successione convergente è limitata, esiste una costante $M > 0$ per cui

$$\|\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{y}}\| < M, \quad \forall k \geq 1$$

e quindi, ricorrendo alla disuguaglianza triangolare,

$$\|\mathbf{x}_k\| \leq \|\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{y}}\| + \|\bar{\mathbf{y}}\| < M + \|\bar{\mathbf{y}}\|, \quad \forall k \geq 1 \quad (\text{B.16})$$

Poiché i vettori \mathbf{x}_k sono contenuti nella sfera di centro l'origine e raggio $M + \|\bar{\mathbf{y}}\|$, la successione $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$ è limitata e contiene una sottosuccessione $\mathbf{x}_{k_1}, \mathbf{x}_{k_2}, \dots$ convergente ad un vettore limite, che chiameremo $\bar{\mathbf{x}}$. Essendo gli elementi della sottosuccessione contenuti nel chiuso C , anche il limite $\bar{\mathbf{x}}$ è in C , e risulta

$$d(\bar{\mathbf{y}}, C) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \|\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{y}}\| = \lim_{j \rightarrow +\infty} \|\mathbf{x}_{k_j} - \bar{\mathbf{y}}\| = \|\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}\|.$$

(ii) Sia $\bar{\mathbf{x}}$ un punto di C a distanza minima da $\bar{\mathbf{y}}$ e sia \mathbf{x} qualsiasi altro vettore di C . Per la convessità, appartengono a C tutti i vettori $(1 - \lambda)\bar{\mathbf{x}} + \lambda\mathbf{x}$, $0 \leq \lambda \leq 1$, ciascuno dei quali ha distanza da $\bar{\mathbf{y}}$ non inferiore a quella di $\bar{\mathbf{x}}$:

$$\|\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}\|^2 \leq \|(1 - \lambda)\bar{\mathbf{x}} + \lambda\mathbf{x} - \bar{\mathbf{y}}\|^2 = \|(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}) - \lambda(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x})\|^2 \quad \forall \lambda \in [0, 1]. \quad (\text{B.17})$$

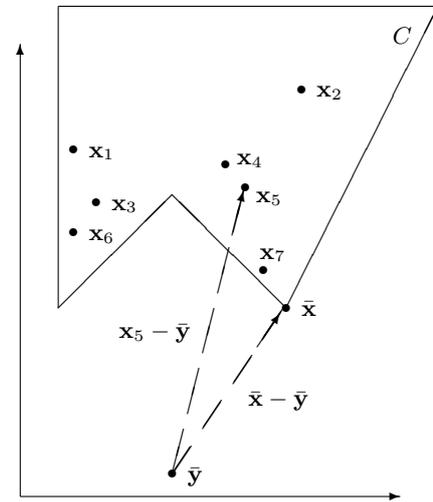


Figura B.3.1

Ponendo $\mathbf{a} := \bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}$, $\mathbf{b} := \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$, da (B.17) si ricava

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^T \mathbf{a} &\leq \mathbf{a}^T \mathbf{a} - 2\lambda \mathbf{a}^T \mathbf{b} + \lambda^2 \mathbf{b}^T \mathbf{b} \quad \forall \lambda \in (0, 1] \\ 0 &\leq -2\lambda \mathbf{a}^T \mathbf{b} + \lambda^2 \mathbf{b}^T \mathbf{b} \\ 0 &\leq -\mathbf{a}^T \mathbf{b} + \frac{\lambda}{2} \mathbf{b}^T \mathbf{b}. \end{aligned}$$

e passando al limite per $\lambda \rightarrow 0^+$, si ottiene $\mathbf{a}^T \mathbf{b} \leq 0$. Quindi vale (B.14).

Se esiste un altro punto $\hat{\mathbf{x}} \in C$ per cui risulta

$$\|\hat{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}\| = d(\bar{\mathbf{y}}, C) = \|\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}\|,$$

sostituendo nella (B.14) al generico $\mathbf{x} \in C$ il vettore $\hat{\mathbf{x}}$, troviamo

$$(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}})^T (\bar{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}) \leq 0. \quad (\text{B.18})$$

Ma in (B.14) possiamo anche far assumere a $\bar{\mathbf{x}}$ il ruolo del vettore $\hat{\mathbf{x}}$, che rappresenta ora punto a minima distanza da C , e sostituire al generico vettore \mathbf{x} il vettore $\bar{\mathbf{x}}$, ottenendo $(\hat{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}})^T (\hat{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}) \leq 0$, o equivalentemente

$$(\bar{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{x}})^T (\bar{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}) \leq 0 \quad (\text{B.19})$$

Sommando membro a membro (B.18) e (B.19), si ricava $(\bar{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}})^T (\bar{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}) = \|\bar{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}\|^2 \leq 0$, quindi $\bar{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}$. ■

Proposizione B.3.2 [TEOREMA DI SEPARAZIONE (PER I CONI)] (i) Se C è un cono chiuso e convesso di \mathbb{R}^n e $\bar{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n$ non appartiene al cono, esiste un vettore $\bar{\mathbf{x}} \in C$ tale che

$$(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}})^T \mathbf{x} \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in C, \quad (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}})^T \bar{\mathbf{x}} = 0, \quad (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}})^T \bar{\mathbf{y}} < 0. \quad (\text{B.20})$$

Conseguentemente, il semispazio $\mathcal{S}_{\bar{\mathbf{x}}-\bar{\mathbf{y}}}^+$, individuato dall'iperpiano $\mathcal{H}_{\bar{\mathbf{x}}-\bar{\mathbf{y}}}$, è di supporto per C e non contiene $\bar{\mathbf{y}}$.

(ii) Se C_1 e C_2 sono coni convessi non vuoti di \mathbb{R}^n , la condizione $\text{ri}(C_1) \cap \text{ri}(C_2) = \emptyset$ è necessaria e sufficiente perchè esista vettore non nullo \mathbf{a} tale che l'iperpiano $\mathcal{H}_{\mathbf{a}}$ separi propriamente C_1 da C_2 , nel senso che

$$\mathbf{a}^T \mathbf{x}_1 \geq 0, \quad \forall \mathbf{x}_1 \in C_1, \quad \mathbf{a}^T \mathbf{x}_2 \leq 0 \quad \forall \mathbf{x}_2 \in C_2, \quad \mathcal{H}_{\mathbf{a}} \not\supseteq C_1 \cup C_2 \quad (\text{B.21})$$

ovvero $\mathcal{S}_{\mathbf{a}}^+$ è di supporto per C_1 , $\mathcal{S}_{\mathbf{a}}^-$ è di supporto per C_2 e $C_1 \cup C_2$ non è interamente contenuto nell'iperpiano separatore $\mathcal{H}_{\mathbf{a}}$.

PROVA (i) Sia $\bar{\mathbf{x}} \in C$ il vettore considerato nel lemma precedente.

Se $\mathbf{x} \in C$, si considerino i vettori $\lambda \mathbf{x}$, $\lambda > 0$. Essi appartengono a C e da (B.14) segue

$$\begin{aligned} (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}})^T (\bar{\mathbf{x}} - \lambda \mathbf{x}) &\leq 0 \\ (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}})^T \left(\frac{\bar{\mathbf{x}}}{\lambda} - \mathbf{x} \right) &\leq 0 \\ \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}})^T \left(\frac{\bar{\mathbf{x}}}{\lambda} - \mathbf{x} \right) &= (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}})^T (-\mathbf{x}) \leq 0. \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Quindi $(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}})^T \mathbf{x} \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in C$.

Se consideriamo i vettori di C multipli di $\bar{\mathbf{x}}$, ovvero $\lambda \bar{\mathbf{x}}$, $\lambda \geq 0$, dalla (B.14) si ricava

$$0 \geq (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}})^T (\bar{\mathbf{x}} - \lambda \bar{\mathbf{x}}) = (1 - \lambda) (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}})^T \bar{\mathbf{x}} \quad \forall \lambda \geq 0. \quad (\text{B.23})$$

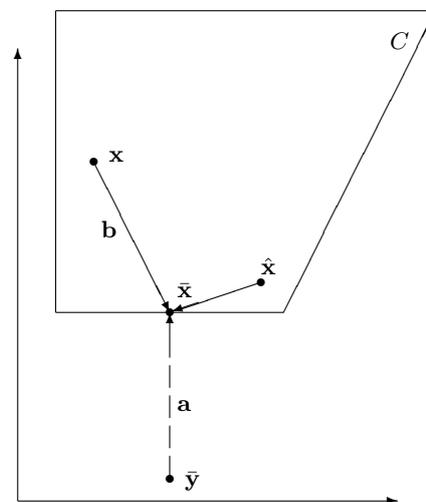


Figura B.3.2

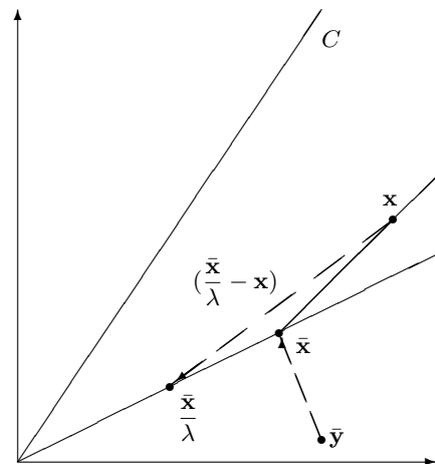


Figura B.3.3

Poiché $1 - \lambda$ assume sia valori negativi che positivi, (B.23) vale solo se $(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}})^T \bar{\mathbf{x}} = 0$. Infine, tenendo conto dell'ortogonalità appena dimostrata fra $\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}$ e $\bar{\mathbf{x}}$, si ha

$$0 < (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}})^T (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}) = (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}})^T (-\bar{\mathbf{y}}),$$

ovvero $(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}})^T \bar{\mathbf{y}} < 0$.

(ii) Nel cono convesso $K := C_1 - C_2$ si ha, per il punto (d) della proposizione B.2.4,

$$\text{ri}(K) = \text{ri}(C_1 - C_2) = \text{ri}(C_1) + \text{ri}(-C_2) = \text{ri}(C_1) - \text{ri}(C_2),$$

e l'ipotesi $\text{ri}(C_1) \cap \text{ri}(C_2) = \emptyset$ equivale a $\mathbf{0} \notin \text{ri}(K)$.

• Supponiamo dapprima $\text{ri}(C_1) \cap \text{ri}(C_2) = \emptyset$.

Allora il cono \bar{K} è contenuto propriamente in $\langle K \rangle$: infatti, se fosse $\bar{K} = \langle K \rangle$, la convessità di K garantirebbe, per la proposizione B.2.3, l'esistenza di $\mathbf{x} \in \text{ri}(K)$, il suo opposto $-\mathbf{x}$ sarebbe contenuto in \bar{K} e dal punto (a) della proposizione B.2.3 seguirebbe $\mathbf{0} = \mathbf{x}/2 + (-\mathbf{x})/2 \in \text{ri}(K)$, ovvero $\text{ri}(C_1) \cap \text{ri}(C_2) \neq \emptyset$. Se $\bar{\mathbf{y}} \in \langle K \rangle \setminus \bar{K}$, per (i) esiste un vettore $\bar{\mathbf{x}} \in \bar{K}$ tale che $\mathbf{a} := \bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}$, ovviamente appartenente a $\langle K \rangle$, soddisfi le condizioni

$$\mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \bar{K}, \quad \mathbf{a}^T \bar{\mathbf{x}} = 0, \quad \mathbf{a}^T \bar{\mathbf{y}} < 0 \quad (\text{B.24})$$

Se \mathbf{x}_1 è in C_1 e \mathbf{x}_2 è in C_2 , la differenza $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ appartiene a $K \subseteq \bar{K}$, quindi $\mathbf{a}^T \mathbf{x}_1 \geq \mathbf{a}^T \mathbf{x}_2$ e dall'arbitrarietà di \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 segue

$$\inf_{\mathbf{x}_1 \in C_1} \mathbf{a}^T \mathbf{x}_1 \geq \sup_{\mathbf{x}_2 \in C_2} \mathbf{a}^T \mathbf{x}_2 \quad (\text{B.25})$$

Poiché $\bar{\mathbf{x}} \in \bar{K}$ è il limite di una successione di punti in K , ovvero $\bar{\mathbf{x}} = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} (\mathbf{x}_1^{(\nu)} - \mathbf{x}_2^{(\nu)})$, si ha

$$0 = \mathbf{a}^T \bar{\mathbf{x}} = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} (\mathbf{a}^T \mathbf{x}_1^{(\nu)} - \mathbf{a}^T \mathbf{x}_2^{(\nu)}),$$

quindi in (B.25) deve valere il segno di eguaglianza. Poiché $\mathbf{a}^T \mathbf{0} = 0$, è chiaro che $\inf_{\mathbf{x}_1 \in C_1} \mathbf{a}^T \mathbf{x}_1$ non può essere positivo e che $\sup_{\mathbf{x}_2 \in C_2} \mathbf{a}^T \mathbf{x}_2$ non può essere negativo e si perviene alla relazione

$$\min_{\mathbf{x}_1 \in C_1} \mathbf{a}^T \mathbf{x}_1 = 0 = \max_{\mathbf{x}_2 \in C_2} \mathbf{a}^T \mathbf{x}_2,$$

che dimostra le due disuguaglianze in (B.21). Infine, se $C_1 \cup C_2$ fosse contenuto in $\mathcal{H}_{\mathbf{a}}$, vi sarebbe contenuto lo spazio $\langle K \rangle$, quindi vi apparterebbe $\bar{\mathbf{y}}$, e si dovrebbe avere $\mathbf{a}^T \bar{\mathbf{y}} = 0$, in contraddizione con (B.24).

• Supponiamo ora che qualche vettore \mathbf{p} appartenga a $\text{ri}(C_1) \cap \text{ri}(C_2)$. Con riferimento alla medesima base per $\langle C_1 + C_2 \rangle$ considerata nella proposizione B.2.4, esiste un numero reale $m > 0$ per cui

$$\mathbf{p} + \sum_{i=1}^s \alpha_i \mathbf{v}_i \in C_1, \quad \mathbf{p} + \sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=s+1}^t \alpha_i \mathbf{v}_i \in C_2, \quad \forall \alpha_i, |\alpha_i| < m.$$

Quindi deve essere $\mathbf{a}^T (\mathbf{p} + \sum_{i=1}^s \alpha_i \mathbf{v}_i) \geq 0$ e $\mathbf{a}^T (\mathbf{p} + \sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=s+1}^t \alpha_i \mathbf{v}_i) \leq 0$ per ogni scelta dei coefficienti α_i con $|\alpha_i| < m$. Scegliendo nulli tutti gli α_i si conclude che $\mathbf{a}^T \mathbf{p} = 0$, mentre scegliendoli tutti nulli eccetto uno, e tenendo conto che il coefficiente non nullo può assumere valori di entrambi i segni, si conclude che $\mathbf{a}^T \mathbf{v}_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, t$. Ma allora tutti i vettori della base per $\langle C_1 + C_2 \rangle$ appartengono all'iperpiano $\mathcal{H}_{\mathbf{a}}$, quindi $C_1 \cup C_2 \subseteq \mathcal{H}_{\mathbf{a}}$ e l'iperpiano non separa propriamente i due coni. ■

- ESERCIZIO B.3.1 Ogni cono convesso che non coincida con \mathbb{R}^n ammette almeno un semispazio di \mathbb{R}^n come supporto.

Dato un cono convesso $C \neq \mathbb{R}^n$, si consideri la totalità dei semispazi $\mathcal{S}_{\mathbf{v}}^+$ che sono supporto di C . L'insieme C^* dei vettori che determinano tali semispazi contiene tutti e soli i vettori \mathbf{v} per cui è soddisfatta la condizione

$$\mathbf{v}^T \mathbf{x} \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in C \quad (\text{B.26})$$

ovvero i vettori \mathbf{v} che formano un angolo non superiore ad un angolo retto con tutti i vettori del cono C . È chiaro che il cono C è contenuto in tutti i suoi semispazi supporto $\mathcal{S}_{\mathbf{v}}^+$, $\mathbf{v} \in C^*$, quindi nella loro intersezione

$$C \subseteq \bigcap_{\mathbf{v} \in C^*} \mathcal{S}_{\mathbf{v}}^+ \quad (\text{B.27})$$

e che l'insieme $\bigcap_{\mathbf{v} \in C^*} \mathcal{S}_{\mathbf{v}}^+$ è a sua volta un cono, chiuso e convesso⁴. Tenuto conto del teorema di separazione, è ora immediato il seguente

Corollario B.3.3 [CONI CHIUSI E CONVESSI] *I coni chiusi e convessi sono tutti e soli quelli che possono essere espressi come intersezione di semispazi delimitati da iperpiani (per l'origine).*

PROVA Se C è un cono chiuso e convesso e $\bar{\mathbf{y}}$ è un punto che non appartiene al cono, per il teorema di separazione esiste almeno un semispazio che contiene C e non contiene $\bar{\mathbf{y}}$. Quindi vale l'inclusione

$$C \supseteq \bigcap_{\mathbf{v} \in C^*} \mathcal{S}_{\mathbf{v}}^+ \quad (\text{B.28})$$

e da (B.27) e (B.28) segue che C è intersezione di semispazi.

Viceversa, se C è una intersezione di semispazi, è chiuso e convesso (cfr. nota 3). ■

Dato un cono C , non necessariamente chiuso o convesso, l'insieme C^* considerato in (B.26) ha struttura di cono in \mathbb{R}^n . Vale infatti la seguente proposizione:

Proposizione B.3.4 [CONO DUALE] *Dato un cono C , l'insieme C^* definito da*

$$C^* = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{v}^T \mathbf{x} \geq 0, \forall \mathbf{x} \in C\} \quad (\text{B.29})$$

è un cono chiuso e convesso, detto il cono duale di C .

i) *Se C_1 e C_2 sono due coni in \mathbb{R}^n e $C_1 \subseteq C_2$, allora $C_1^* \supseteq C_2^*$.*

Se $C^{**} := (C^*)^*$ è il duale di C^* , allora

ii) $C \subseteq C^{**}$

iii) $C^* = (C^{**})^* = (C^*)^{**} =: C^{***}$

iv) *si equivalgono le condizioni seguenti:*

a. C è chiuso e convesso;

b. C è intersezione di semispazi chiusi, delimitati da iperpiani per l'origine;

c. il cono C è duale di qualche cono;

d. $C = C^{**}$;

⁴ogni intersezione di insiemi chiusi (di insiemi convessi) è un insieme chiuso (un insieme convesso)

PROVA Qualunque sia C , l'insieme definito da (B.29) è un cono. Infatti, se \mathbf{v} soddisfa la disuguaglianza $\mathbf{v}^T \mathbf{x} \geq 0$, anche $\alpha \mathbf{v}$ la soddisfa quando α è non negativo.

Da (B.29) si ricava anche

$$C^* = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{v}^T \mathbf{x} \geq 0, \forall \mathbf{x} \in C\} = \bigcap_{\mathbf{x} \in C} \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{v}^T \mathbf{x} \geq 0\} \quad (\text{B.30})$$

che dimostra come C^* sia intersezione di semispazi chiusi, e quindi sia un cono chiuso e convesso (eventualmente costituito dalla sola origine di \mathbb{R}^n).

(i) Se $\mathbf{v} \in C_2^*$ allora $\mathbf{v}^T \mathbf{x} \geq 0, \forall \mathbf{x} \in C_2$, quindi $\mathbf{v}^T \mathbf{x} \geq 0, \forall \mathbf{x} \in C_1$, ovvero $\mathbf{v} \in C_1^*$.

(ii) Per definizione, $(C^*)^* = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{y}^T \mathbf{v} \geq 0, \forall \mathbf{v} \in C^*\}$, da cui

$$\mathbf{x} \in C \Rightarrow \mathbf{v}^T \mathbf{x} \geq 0, \forall \mathbf{v} \in C^* \Leftrightarrow \mathbf{x}^T \mathbf{v} \geq 0, \forall \mathbf{v} \in C^* \Leftrightarrow \mathbf{x} \in (C^*)^* \quad (\text{B.31})$$

(iii) È chiaro che $(C^{**})^* = ((C^*)^*)^* = (C^*)^{**}$. Osserviamo poi dall'inclusione $C^{**} \supseteq C$ (provata in (ii)) e da (i) segue

$$C^{***} = (C^{**})^* \subseteq C^* \quad (\text{B.32})$$

Sempre da (ii) si ha anche

$$C^* \supseteq (C^{**})^* = C^{***} \quad (\text{B.33})$$

e da (B.32) e (B.33) si conclude che $C^* = C^{***}$.

iv) a. \Rightarrow b. È parte del Corollario B.3.3.

b. \Rightarrow c. Se il cono C è espresso come intersezione di semispazi, $C = \bigcap_{\mathbf{v} \in L} \mathcal{S}_{\mathbf{v}}^+$, il cono risultante dall'intersezione non cambia se sostituiamo all'insieme L il sovrainsieme $C^* = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{v}^T \mathbf{x} \geq 0, \forall \mathbf{x} \in C\} \supseteq L$. Infatti i vettori in $C^* \setminus L$ individuano soltanto semispazi che contengono C e quindi non alterano l'intersezione ottenuta prendendo come indici i vettori di L . Allora

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in C &\Leftrightarrow \mathbf{x} \in \bigcap_{\mathbf{v} \in C^*} \mathcal{S}_{\mathbf{v}}^+ = \{\mathbf{x} : \mathbf{v}^T \mathbf{x} \geq 0, \forall \mathbf{v} \in C^*\} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{x} \in \{\mathbf{x} : \mathbf{x}^T \mathbf{v} \geq 0, \forall \mathbf{v} \in C^*\} = (C^*)^* \end{aligned}$$

Quindi C è duale di C^* .

c. \Rightarrow d. Se esiste un cono K tale che $C = K^*$, allora $C = K^* = K^{***} = (K^*)^{**} = C^{**}$

d. \Rightarrow a. Da $C = C^{**} = (C^*)^*$, segue che C è chiuso e convesso, in quanto cono duale (di C^*). ■

Proposizione B.3.5 [CONO CON VERTICE E SOLIDITÀ DEL CONO DUALE] *Se il duale C^* di un cono $C \subseteq \mathbb{R}^n$ è solido, allora C è un cono con vertice. Se C è chiuso e convesso ed ha vertice, allora C^* è solido.*

PROVA Se C^* è solido, contiene n vettori linearmente indipendenti $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ e per ogni vettore $\mathbf{x} \in C$ deve essere $\mathbf{v}_i^T \mathbf{x} \geq 0, i = 1, \dots, n$. Se \mathbf{x} e $-\mathbf{x}$ appartengono entrambi a C ,

$$\mathbf{v}_i^T \mathbf{x} \geq 0, \mathbf{v}_i^T (-\mathbf{x}) \geq 0 \Rightarrow \mathbf{v}_i^T \mathbf{x} = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

e \mathbf{x} è nullo, risultando ortogonale a n vettori indipendenti.

Se C^* non è solido, è contenuto in un sottospazio di dimensione $n-1$, ovvero esiste un vettore $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ per cui si ha $\mathbf{w}^T \mathbf{v} = 0, \forall \mathbf{v} \in C^*$. Quindi \mathbf{w} e $-\mathbf{w}$ appartengono entrambi a C^{**} , che risulta pertanto privo di vertice. Ma se C è chiuso e convesso, si ha $C = C^{**}$ per la proposizione B.3.4. ■

Esempio B.3.1 In \mathbb{R}^2 il cono

$$C = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, x_1 > 0 \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

è convesso, non chiuso ed ha vertice. Il cono duale

$$C^* = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha \geq 0 \right\}$$

non è solido.

B.4 Coni poliedrici e coni finitamente generati

Definizione B.4.1 [CONO POLIEDRICO] *Un cono $C \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice “poliedrico” se è intersezione di un insieme finito di semispazi chiusi (delimitati da iperpiani per l’origine), e quindi se esiste un insieme finito di vettori $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k$ di \mathbb{R}^n per cui*

$$C = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{w}_i^T \mathbf{x} \geq 0, i = 1, 2, \dots, k\} = \bigcap_{i=1, \dots, k} \mathcal{S}_{\mathbf{w}_i}^+ \quad (\text{B.34})$$

È chiaro da (B.34) che un cono poliedrico è l’insieme delle soluzioni di un sistema finito di disequazioni lineari omogenee

$$\begin{aligned} w_{11}x_1 + w_{12}x_2 + \dots + w_{1n}x_n &\geq 0 \\ w_{21}x_1 + w_{22}x_2 + \dots + w_{2n}x_n &\geq 0 \\ \dots &\dots \dots \\ w_{k1}x_1 + w_{k2}x_2 + \dots + w_{kn}x_n &\geq 0 \end{aligned}$$

ovvero, ponendo $W = [\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \dots \ \mathbf{w}_k]$, è l’insieme delle soluzioni della disequazione matriciale lineare

$$W^T \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Se introduciamo il cono $K = \text{cono}(\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k\})$, da

$$K = \{\mathbf{y} : \mathbf{y} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{w}_i, \lambda_i \geq 0\} = \{\mathbf{y} : \mathbf{y} = W\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}_+^k\}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} K^* &= \{\mathbf{x} : \mathbf{x}^T \mathbf{y} \geq 0, \forall \mathbf{y} \in K\} = \{\mathbf{x} : \mathbf{x}^T \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{w}_i \geq 0, \forall \lambda_i \geq 0\} \\ &= \{\mathbf{x} : \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{x}^T \mathbf{w}_i \geq 0, \forall \lambda_i \geq 0\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{w}_i^T \mathbf{x} \geq 0, i = 1, 2, \dots, n\} = C. \end{aligned}$$

Abbiamo verificato così la

Proposizione B.4.2 *Un cono C è poliedrico se e solo se è il duale di un cono finitamente generato.*

È naturale a questo punto domandarsi se un cono poliedrico sia esso stesso finitamente generato e, viceversa, se un cono finitamente generato sia poliedrico. Un importante teorema di H.Weil fornisce risposta affermativa a entrambi i quesiti: come conseguenza potremo identificare fra loro le classi dei coni finitamente generati e quella dei coni poliedrici, evidenziando nel primo caso gli “spigoli” che generano il cono, nel secondo le “facce” che lo delimitano.

Come preliminari, svolgeremo alcune considerazioni e dimostreremo due lemmi il cui interesse travalica l’aspetto puramente strumentale, di ausilio nella prova del teorema di Weil.

Siano $W = \mathbb{R}^n$ e $V = \mathbb{R}^{\bar{n}}$ e sia $\mathcal{A} : W \rightarrow V$ una trasformazione lineare, rappresentata dalla matrice $A \in \mathbb{R}^{\bar{n} \times n}$.

Se $K = \text{cono}(\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k\})$ è un cono finitamente generato in W allora è chiaro che $\mathcal{A}(K)$, il sottoinsieme di V trasformato di K secondo \mathcal{A} , è anch'esso un cono finitamente generato e si ha

$$\mathcal{A}(K) = \text{cono}(\{A\mathbf{w}_1, A\mathbf{w}_2, \dots, A\mathbf{w}_k\}).$$

D'altra parte, se C è un cono poliedrico in V , per la proposizione precedente esso è il duale in V di un cono finitamente generato $K = \text{cono}(\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_h\}) \subseteq V$.

Si hanno allora le seguenti equivalenze:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \in \mathcal{A}^{-1}(C) &\Leftrightarrow A\mathbf{w} \in C = K^* \\ &\Leftrightarrow (A\mathbf{w})^T \mathbf{v} \geq 0, \quad \forall \mathbf{v} \in K \\ &\Leftrightarrow \mathbf{w}^T (A^T \mathbf{v}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{v} \in K \\ &\Leftrightarrow \mathbf{w}^T (A^T \mathbf{v}_i) \geq 0, \quad \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_h \in K \\ &\Leftrightarrow \mathbf{w} \in \text{cono}(\{A^T \mathbf{v}_1, A^T \mathbf{v}_2, \dots, A^T \mathbf{v}_h\})^* \end{aligned}, \quad (\text{B.35})$$

quindi $\mathcal{A}^{-1}(C)$ è duale di un cono finitamente generato, quindi è poliedrico. Riassumendo,

Lemma B.4.3 *Se W e V sono spazi di dimensione finita ed $\mathcal{A} : W \rightarrow V$ è una trasformazione lineare, allora*

se $K \subseteq W$ è un cono finitamente generato, $\mathcal{A}(K) \subseteq V$ è un cono finitamente generato;

se $C \subseteq V$ è un cono poliedrico, allora $\mathcal{A}^{-1}(C) \subseteq W$ è un cono poliedrico.

Se C_1, C_2, \dots, C_k sono coni in \mathbb{R}^n , con $C_1 + C_2 + \dots + C_k$ indichiamo l'insieme

$$\left\{ \sum_{j=1}^k \lambda_j \mathbf{c}_j, \lambda_j \geq 0, \mathbf{c}_j \in C_j \right\}.$$

È immediato verificare che esso è un cono e che, nell'ipotesi che i C_j siano tutti finitamente generati, lo è anche $C_1 + C_2 + \dots + C_k$. Anche l'insieme intersezione $\bigcap_{j=1}^k C_j$ è un cono e, se i C_j sono tutti poliedrici, ovvero se

$$C_j = \bigcap_{i=1, \dots, k_j} \mathcal{S}_{\mathbf{w}_{ij}}^+,$$

allora è evidentemente poliedrico il cono intersezione. Riassumendo,

Lemma B.4.4 *Somme finite di coni finitamente generati sono coni finitamente generati, intersezioni finite di coni poliedrici sono coni poliedrici*

- ESERCIZIO B.4.1 (i) Si fornisca in \mathbb{R}^3 l'esempio della intersezione di una infinità numerabile di coni poliedrici che è un cono (necessariamente chiuso e convesso) non poliedrico.
- (ii) È possibile trovare un esempio analogo in \mathbb{R}^2 ?

Siamo ora in grado di dimostrare la seguente

Proposizione B.4.5 [TEOREMA DI WEYL] *Un cono $C \subseteq \mathbb{R}^n$ è poliedrico se e solo se è finitamente generato.*

PROVA 1. Finitamente generato \Rightarrow Poliedrico

Supponiamo che il cono C sia finitamente generato e dimostriamo che è poliedrico. Il risultato è banalmente vero in uno spazio vettoriale di dimensione 1. Procediamo allora per induzione sulla dimensione dello spazio: assumiamo che il teorema valga in ogni spazio di dimensione inferiore a n e dimostriamone la validità in \mathbb{R}^n . Sia

$$C = \text{cono}(\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k\})$$

e supponiamo, senza ledere la generalità dell'argomento, che tutti i generatori \mathbf{w}_i siano diversi da $\mathbf{0}$. Per $i = 1, 2, \dots, k$, in corrispondenza a ciascun vettore \mathbf{w}_i consideriamo un sottospazio complementare $W^{(i)}$, di dimensione $n - 1$, tale che

$$W^{(i)} \oplus \langle \mathbf{w}_i \rangle = \mathbb{R}^n$$

Allora ogni vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ si scompone in modo unico nella somma

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(i)} + \alpha_i \mathbf{w}_i, \quad \mathbf{x}^{(i)} \in W^{(i)}, \quad (\text{B.36})$$

e sono lineari le mappe di proiezione sui sottospazi $W^{(i)}$

$$\phi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow W^{(i)} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^{(i)}, i = 1, 2, \dots, k.$$

Si osservi che due vettori \mathbf{x} e $\hat{\mathbf{x}}$ che hanno la medesima la proiezione i -esima, i.e. soddisfano $\phi_i(\mathbf{x}) = \phi_i(\hat{\mathbf{x}})$, differiscono per un multiplo di \mathbf{w}_i .

Per il Lemma B.4.3,

$$\phi_i(C) \subseteq W^{(i)}, i = 1, 2, \dots, k$$

sono coni finitamente generati contenuti in sottospazi di dimensione $n - 1$, quindi sono poliedrici per l'ipotesi induttiva. Ancora per il lemma B.4.3,

$$C_i := \phi_i^{-1}(\phi_i(C)) \subseteq \mathbb{R}^n, i = 1, 2, \dots, k$$

sono coni poliedrici e per il lemma B.4.4 è poliedrico il cono intersezione $\bigcap_{i=1}^k C_i$. Poichè, come si vede facilmente, per ogni i vale l'inclusione $C \subseteq C_i$, vale anche

$$C \subseteq \bigcap_{i=1}^k C_i. \quad (\text{B.37})$$

Per concludere, basterà provare che C è poliedrico anche quando in (B.37) non vale il segno di uguaglianza. Supponiamo, quindi, che esista un vettore \mathbf{x} per cui risultino soddisfatte le

$$\mathbf{x} \notin C; \quad \mathbf{x} \in C_i, i = 1, 2, \dots, k \quad (\text{B.38})$$

Da $\mathbf{x} \in C_i = \phi_i^{-1}(\phi_i(C))$, $i = 1, 2, \dots, k$ segue

$$\phi_i(\mathbf{x}) \in \phi_i(C_i) = \phi_i(\phi_i^{-1}(\phi_i(C))) = \phi_i(C) \subseteq W^{(i)}, i = 1, 2, \dots, k.$$

Quindi \mathbf{x} non appartiene a C , ma tutte le sue proiezioni $\mathbf{x}^{(i)} = \phi_i(\mathbf{x})$ sui sottospazi $W^{(i)}$ coincidono con le proiezioni di opportuni elementi del cono C . Equivalentemente, per ciascun $i = 1, 2, \dots, k$, esiste nel cono C un elemento $\sum_{j=1}^k \lambda_{ij} \mathbf{w}_j$ che differisce da \mathbf{x} per un multiplo di \mathbf{w}_i

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \alpha_1 \mathbf{w}_1 &= \sum_{j=1}^k \lambda_{1j} \mathbf{w}_j, & \lambda_{1j} \geq 0, j = 1, 2, \dots, k \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{x} + \alpha_k \mathbf{w}_k &= \sum_{j=1}^k \lambda_{kj} \mathbf{w}_j, & \lambda_{kj} \geq 0, j = 1, 2, \dots, k \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

e deve essere $\alpha_i > \lambda_{ii} \geq 0$, $\forall i$, altrimenti \mathbf{x} apparterebbe al cono C . La matrice

$$A := \begin{bmatrix} \lambda_{11} - \alpha_1 & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1k} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} - \alpha_2 & \dots & \lambda_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{k1} & \lambda_{k2} & \dots & \lambda_{kk} - \alpha_k \end{bmatrix}$$

è allora una matrice di Metzler con diagonale strettamente negativa e (B.39) assume la forma

$$\mathbf{x} \mathbf{1}_k^T = [\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2 \quad \dots \quad \mathbf{w}_k] A \quad (\text{B.40})$$

È immediato verificare che A ha struttura $F + \gamma I_k$, con F matrice positiva e $\gamma < 0$; pertanto, se $\lambda_0 \geq 0$ è l'autovalore massimale di F , cui corrisponde un autovettore $\mathbf{v}_0 > 0$, la matrice A avrà il medesimo autovettore, corrispondente al suo autovalore a parte reale massima $\mu_0 := \lambda_0 + \gamma$. Postmoltiplicando per $\mathbf{v}_0 > 0$ entrambi i membri di (B.40) e tenuto conto che $\mathbf{1}_k^T \mathbf{v}_0$ è un numero $\beta > 0$, si ottiene

$$\mathbf{x} = [\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2 \quad \dots \quad \mathbf{w}_k] \mathbf{v}_0 \frac{\mu_0}{\beta} \quad (\text{B.41})$$

Poiché \mathbf{x} non appartiene a C , da (B.41) segue $\mu_0 < 0$ e al cono C appartiene il vettore opposto $-\mathbf{x}$. Allora $-A$ ha tutti gli autovalori a parte reale positiva, quindi è una M-matrice, la sua inversa $(-A)^{-1}$ è una matrice positiva (cfr. Proposizione 10.7.2), il vettore riga

$$\mathbf{1}_k^T (-A)^{-1} := \mathbf{p}^T = [p_1 \quad p_2 \quad \dots \quad p_k]$$

è strettamente positivo e da (B.40) si ottiene

$$-\mathbf{x} \mathbf{p}^T = [-p_1 \mathbf{x} \quad -p_2 \mathbf{x} \quad \dots \quad -p_k \mathbf{x}] = [\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2 \quad \dots \quad \mathbf{w}_k] \quad (\text{B.42})$$

La (B.42) implica che il cono C ha il vettore $-\mathbf{x}$ come unico generatore ed è facile vedere che un cono con un solo generatore è poliedrico.

2. Poliedrico \Rightarrow Finitamente generato

Per la proposizione B.4.2 e per la prima parte del teorema di Weyl, ogni cono poliedrico è duale di un cono finitamente generato e quindi di un cono poliedrico.

Per dimostrare il punto 2, supponiamo che C sia un cono poliedrico. Allora esiste un cono K , poliedrico e finitamente generato, per cui $C = K^*$ ed esiste un cono X , poliedrico e finitamente generato, per cui $K = X^*$. Poiché X è poliedrico, si ha $X = X^{**}$; poiché X è finitamente generato, da

$$C = K^* = (X^*)^* = X$$

segue che anche C è finitamente generato. ■

- ESERCIZIO B.4.2 (i) Un cono con un solo generatore è poliedrico.

(ii) Sia $C = \text{cono}(\{\mathbf{e}_1\}) \subset \mathbb{R}^n$ e siano $W^{(1)} = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ un sottospazio complementare a $\langle \mathbf{e}_1 \rangle$ e $\phi_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow W^{(1)}$ la proiezione su $W^{(1)}$. Si individuino i coni $\phi_1(C)$ e $\phi_1^{-1}(\phi_1(C))$.

‡ *Suggerimento per (i): se $C = \text{cono}(\{\mathbf{w}_1\})$ e se $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n)$ è una base ortogonale per \mathbb{R}^n , gli iperpiani $\mathcal{H}_{\mathbf{w}_2}, \dots, \mathcal{H}_{\mathbf{w}_n}$ contengono tutti \mathbf{w}_1 e la loro intersezione è il sottospazio $\langle \mathbf{w}_1 \rangle$. Si intersechi $\langle \mathbf{w}_1 \rangle$ con $\mathcal{S}_{\mathbf{w}_1}^+$.*

- ESERCIZIO B.4.3 Se il cono C è poliedrico, si verifichi che

$$C^* \text{ solido} \Leftrightarrow C \text{ ha vertice}; \quad C \text{ solido} \Leftrightarrow C^* \text{ ha vertice}$$

B.5 Disequazioni lineari ed alternative

I risultati che abbiamo ottenuto finora sui coni poliedrici consentono di discutere vari problemi riguardanti la risolubilità di sistemi di disequazioni lineari. Le caratterizzazioni della risolubilità sono presentate sotto forma di alternative.

Proposizione B.5.1 [ALTERNATIVA DI FARKAS] *Dati $W \in \mathbb{R}^{n \times k}$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, è sempre vero uno e uno solo dei due enunciati posti in alternativa:*

- (1) *l'equazione $W\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ammette una soluzione $\bar{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}$, oppure*
- (2) *la disequazione $W^T\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ ammette una soluzione $\bar{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n$ tale che $\bar{\mathbf{y}}^T\mathbf{b} < 0$*

PROVA DELL'ALTERNATIVA (1)/(2) Se $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k$ sono le colonne della matrice W , il verificarsi dell'alternativa (1) equivale a supporre

$$\mathbf{b} \in K := \text{cono}(\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k\}) \tag{B.43}$$

Il cono duale di K è

$$K^* = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{y}^T\mathbf{x} \geq 0, \forall \mathbf{x} \in K\} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : W^T\mathbf{y} \geq \mathbf{0}\} \tag{B.44}$$

mentre, attesa la poliedricità di K , il suo doppio duale coincide con K

$$K = K^{**} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x}^T\mathbf{y} \geq 0, \forall \mathbf{y} \in K^*\}. \tag{B.45}$$

Il mancato verificarsi dell'alternativa (1) equivale ad asserire $\mathbf{b} \notin K$, ovvero, per la (B.45), ad affermare l'esistenza di $\bar{\mathbf{y}} \in K^*$ per cui risulta $\bar{\mathbf{y}}^T\mathbf{b} < 0$. Ricordando che $\bar{\mathbf{y}} \in K^*$ se e solo se $W^T\bar{\mathbf{y}} \geq \mathbf{0}$, si conclude che (1) è falsa se e solo se (2) è vera. ■

La prova che abbiamo svolto pone in particolare evidenza il significato geometrico del lemma di Farkas: dato un cono poliedrico in \mathbb{R}^n , un vettore non appartiene al cono se e solo se esso forma un angolo ottuso con almeno un vettore del cono duale.

Corollario B.5.2 *Dati $W \in \mathbb{R}^{n \times k}$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, è sempre vero uno e uno solo dei due enunciati posti in alternativa:*

- (1') *la disequazione $W\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ ammette una soluzione $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^k$, oppure*
- (2') *l'equazione $W^T\mathbf{y} = \mathbf{0}$ ammette una soluzione $\bar{\mathbf{y}} > \mathbf{0}$ tale che $\bar{\mathbf{y}}^T\mathbf{b} < 0$*

PROVA DELL'ALTERNATIVA (1')/(2') Introduciamo la matrice $M = [W \ -W \ I_n]$ e osserviamo che se

$$M\mathbf{z} = [W \ -W \ I_n] \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \\ \mathbf{z}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{b} \tag{B.46}$$

ammette una soluzione non negativa $\bar{\mathbf{z}}$, allora $W(\bar{\mathbf{z}}_1 - \bar{\mathbf{z}}_2) = \mathbf{b} - \bar{\mathbf{z}}_3 \leq \mathbf{b}$ e pertanto $\bar{\mathbf{x}} := \bar{\mathbf{z}}_1 - \bar{\mathbf{z}}_2$ è una soluzione della (1'). Viceversa, supponiamo che $\bar{\mathbf{x}}$ soddisfi la (1'), ovvero $W\bar{\mathbf{x}} \leq \mathbf{b}$. Se poniamo⁵ $\bar{\mathbf{z}}_1 = \bar{\mathbf{x}} \vee \mathbf{0}$ e $\bar{\mathbf{z}}_2 = -(\bar{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{0})$ si ottiene

$$W\bar{\mathbf{x}} = W\bar{\mathbf{z}}_1 - W\bar{\mathbf{z}}_2 \leq \mathbf{b}$$

e per soddisfare (B.46) basta completare il vettore $\bar{\mathbf{z}}$ ponendo $\bar{\mathbf{z}}_3 = \mathbf{b} - W\bar{\mathbf{x}}$.

Quindi (1') equivale ad assumere che $M\mathbf{z} = \mathbf{b}$ abbia una soluzione $\bar{\mathbf{z}} \geq \mathbf{0}$.

Consideriamo ora la disequazione

$$M^T\mathbf{y} = [W \ -W \ I_n]^T\mathbf{y} \geq \mathbf{0} \tag{B.47}$$

e supponiamo che essa ammetta una soluzione $\bar{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n$ tale che $\bar{\mathbf{y}}^T\mathbf{b} < 0$. Allora si ha $\bar{\mathbf{y}} > \mathbf{0}$ e da $W\bar{\mathbf{y}} \geq \mathbf{0}$ e $-W\bar{\mathbf{y}} \geq \mathbf{0}$ segue $W\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$. Quindi $\bar{\mathbf{y}}$ risolve la (2'). Viceversa, da (2') segue

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{y}} \end{bmatrix} > \mathbf{0}$$

⁵se $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, il vettore $\mathbf{a} \vee \mathbf{0}$ ($\mathbf{a} \wedge \mathbf{0}$) ha come componente i esima $\max\{a_i, 0\}$ ($\min\{a_i, 0\}$), per $i = 1, \dots, n$.

Quindi (2') equivale ad assumere che $M^T \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ abbia una soluzione $\bar{\mathbf{y}} \geq \mathbf{0}$ tale che $\bar{\mathbf{y}}^T \mathbf{b} < 0$.
Da quanto si è detto, è chiaro che (1') e (2') equivalgono rispettivamente alla prima e alla seconda alternativa del lemma di Farkas riferito alla matrice M . Quindi il corollario è dimostrato. ■

Proposizione B.5.3 [ALTERNATIVA DI STIEMKE] *Data una matrice $W \in \mathbb{R}^{n \times k}$ si verifica sempre una e una sola delle seguenti alternative:*

(1'') l'equazione $W\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ammette una soluzione strettamente positiva $\bar{\mathbf{x}} \gg \mathbf{0}$;

(2'') la disequazione $W^T \mathbf{y} > \mathbf{0}$ ammette una soluzione $\bar{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n$.

PROVA È chiaro che gli enunciati (1'') e (2'') sono incompatibili. Se valessero entrambi, il prodotto $\bar{\mathbf{x}}^T W^T \bar{\mathbf{y}}$ dovrebbe essere simultaneamente positivo (perché $\bar{\mathbf{x}} \gg \mathbf{0}$ e $W^T \bar{\mathbf{y}} > \mathbf{0}$) e nullo (perché $W\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$). Dimostriamo che, se l'enunciato (1'') è falso, allora è vero (2''). Supponiamo che nessun vettore strettamente positivo soddisfi l'equazione $W\mathbf{x} = \mathbf{0}$ o, equivalentemente, che nello spazio \mathbb{R}^k il cono chiuso e convesso $\ker W$ non contenga alcun punto interno del cono chiuso e convesso \mathbb{R}_+^k , ovvero

$$\ker(W) \cap \text{ri}(\mathbb{R}_+^k) = \emptyset.$$

Per il teorema di separazione (proposizione 10.9.4), esiste un vettore non nullo $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^k$ soddisfacente

$$\mathbf{a}^T \mathbf{x}_1 \geq 0 \geq \mathbf{a}^T \mathbf{x}_2$$

per ogni $\mathbf{x}_2 \in \ker(W)$ e ogni $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}_+^k$.

Poiché $\ker(W)$ è uno spazio vettoriale, esso contiene l'opposto di ogni proprio vettore, quindi deve essere $\mathbf{a}^T \mathbf{x}_2 = 0, \forall \mathbf{x}_2 \in \ker(W)$, quindi

$$\ker(W) \subseteq \mathcal{H}_{\mathbf{a}}, \quad \mathbf{a} \in \ker(W)^\perp = \text{Im}(W^T), \quad (\text{B.48})$$

dove l'ultima eguaglianza è l'identità (A.114) riportata in appendice.

D'altra parte, la condizione $\mathbf{a}^T \mathbf{x}_1 \geq 0, \forall \mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}_+^k$ implica $\mathbf{a} > \mathbf{0}$, e da (B.48) segue l'esistenza di $\bar{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n$ per cui

$$W^T \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{a} > \mathbf{0},$$

ovvero l'alternativa (2''). ■

Proposizione B.5.4 [ALTERNATIVA DI K.FAN] *Data una matrice $W \in \mathbb{R}^{n \times k}$ si verifica sempre una e una sola delle seguenti alternative:*

(1''') la disequazione $W\mathbf{x} \leq \mathbf{0}$ ammette una soluzione $\bar{\mathbf{x}} > \mathbf{0}$.

(2''') la disequazione $W^T \mathbf{y} \gg \mathbf{0}$ ammette una soluzione $\bar{\mathbf{y}} > \mathbf{0}$;

PROVA (1''') e (2''') sono incompatibili: se per $\bar{\mathbf{x}} > \mathbf{0}$ risultasse $\mathbf{a} := W\bar{\mathbf{x}} \leq \mathbf{0}$ e per $\bar{\mathbf{y}} > \mathbf{0}$ risultasse $\mathbf{b}^T := \bar{\mathbf{y}}^T W \gg \mathbf{0}$, si avrebbe simultaneamente

$$\bar{\mathbf{y}}^T W \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{b}^T \bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{y}}^T \mathbf{a},$$

un assurdo perché $\mathbf{b}^T \bar{\mathbf{x}} > 0$ e $\bar{\mathbf{y}}^T \mathbf{a} \leq 0$.

Vogliamo far vedere che se l'enunciato (2''') è falso, allora è vero (1'''). Introduciamo l'insieme

$$\mathcal{I} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^k : \mathbf{x} \leq W^T \mathbf{y}, \exists \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^n \right\}$$

\mathcal{I} contiene ovviamente il cono $\{W^T \mathbf{y}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^n\}$ generato dalle colonne di W^T , ed è a sua volta un cono convesso:

- se $\mathbf{x} \leq W^T \mathbf{y}$ per qualche $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^n$, per ogni $\alpha \geq 0$ si ha $\alpha \mathbf{x} \leq W^T \alpha \mathbf{y}, \alpha \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^n$;

- se \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 appartengono a \mathcal{I} , da $\mathbf{x}_1 \leq W^T \mathbf{y}_1$ e $\mathbf{x}_2 \leq W^T \mathbf{y}_2$, con \mathbf{y}_1 e \mathbf{y}_2 in \mathbb{R}_+^n segue, per $\alpha \in [0, 1]$

$$\alpha \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{x}_2 \leq W^T (\alpha \mathbf{y}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{y}_2), \quad \alpha \mathbf{y}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{y}_2 \in \mathbb{R}_+^n.$$

Affermare che (2'') è falsa equivale ad affermare che per ogni $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^n$ il vettore $W^T \mathbf{y}$ non è strettamente positivo, ovvero non appartiene a $\text{ri}(\mathbb{R}_+^k)$. D'altra parte, se $W^T \mathbf{y}$ non è mai strettamente positivo, non lo possono neppure essere i vettori di \mathcal{I} , quindi

$$\text{ri}(\mathcal{I}) \cap \text{ri}(\mathbb{R}_+^k) = \emptyset,$$

ed è applicabile il teorema di separazione B.3.2, con $C_1 = \mathcal{I}$ e $C_2 = \mathbb{R}_+^k$. Esiste pertanto un vettore $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ per cui

$$\mathbf{a}^T \mathbf{y} \geq 0, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^k, \quad \mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{I} \quad (\text{B.49})$$

Dalla prima disuguaglianza in (B.49) segue $\mathbf{a} > \mathbf{0}$, mentre dalla seconda, ricordando che \mathcal{I} comprende tutti i vettori $W^T \mathbf{y}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^n$, si ricava

$$[\mathbf{a}^T W^T] \mathbf{y} \leq 0, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^n$$

e quindi $\mathbf{a}^T W^T \leq \mathbf{0}$.

È ora chiaro che l'alternativa (1'') è soddisfatta dal vettore positivo $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{a}$. ■